Metoda reducerii la absurd

Profesor Cristea Tatiana

Colegiul Național ”Nicolae Titulescu”,Craiova

Metoda reducerii la absurd este o metodă veche, folosită încă din antichitate, pentru demonstrarea unor teoreme sau a unor probleme care au un caracter teoretic.

La baza acestei metode stă legea terţului exclus, una din legile fundamentale ale logicii clasice, care se enunţă astfel : *Din două propoziţii contradictorii una este adevărată, cealaltă falsă, iar a treia posibilitate nu poate exista.* De aici se vede că legea terţului exclus ne spune că din două propoziţii contradictorii una este adevărată, dar nu ne precizează care din cele două propoziţii este adevărată şi care este falsă.

Când la două propoziţii contradictorii aplicăm legea terţului exclus, este suficient să stabilim că una din ele este falsă pentru a deduce că cealaltă este adevărată.

Întâlnim adeseori teoreme şi probleme la care nu dispunem de suficiente elemente pentru a putea pune în evidenţă, în mod direct, adevărul enunţat la fiecare în parte. În asemenea cazuri se caută dovezi care să arate că propoziţia contradictorie a unei teoreme este falsă. Dacă acest lucru s-a arătat, atunci, pe baza legii terţului exclus urmează că propoziţia dată este adevărată şi cu aceasta problema este demonstrată. Acest procedeu de demonstraţie se numeşte demonstraţie indirectă.

Metoda reducerii la absurd constă în a admite în mod provizoriu, ca adevărată, propoziţia contradictorie teoremei date, apoi în baza unei asemenea presupuneri se deduc o serie de consecinţe, care duc la un rezultat absurd, deoarece ele contrazic sau ipoteza teoremei date sau un adevăr stabilit mai înainte. Practic, această metodă se aplică astfel : se presupune că ceea ce trebuie demonstrat nu este adevărat, cu alte cuvinte se neagă concluzia teoremei date. Apoi, pe baza presupunerii făcute, se fac o serie de deducţii logice, care scot în evidenţă faptul că presupunerea făcută nu este posibilă şi rămâne ca adevărată concluzia teoremei date.

Urmează câteva exemple de aplicare a metodei reducerii la absurd în rezolvarea unor probleme de clasa a XI a.

1) Se consideră funcția $f: R \to R$, astfel încât $(f°f)(x) = -x, \forall\, x \in R$. Să se arate că funcția este discontinuă.

Demonstrație:

Presupunem că funcția este funcție continuă și folosind ipoteza problemei o să ajungem la o contradicție, deci presupunerea făcută este falsă, așadar funcția este discontinuă este propoziție adevărată. Demonstrăm că funcția este injectivă. Fie $x_1, x_2\ astfel\ \hat{i}nc\hat{a}t\ f(x_1) = f(x_2)\ rezult\text{ă}\ f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big)$, dar $(f°f)(x) = -x$, rezultă $-x_1 = -x_2$, deci funcția este injectivă. Injectivă și continuă rezultă că este monotonă, dar $(f°f)(x) = -x$, iar –x este funcție strict descrescătoare. Dacă funcția f este monotonă știm că $(f°f)(x)$ este crescătoare, dar –x este descrescătoare, contradicție!

2) Se consideră funcția $f: R \to R$, o funcție continuă cu proprietatea că $\lim_{x\to-\infty} f(x) și\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$ există și sunt egale. Atunci oricare ar fi d> 0 există x_1 și $x_2 \in R$ astfel încât x_1-x_2=d și f(x_1)=f(x_2).

Demonstrație:

Considerăm funcția g(x)=f(x+d)-f(x), pentru orice x număr real, deci g este continuă pe R. Presupunem prin reducere la absurd că g(x) $\neq 0$, $\forall x \in R, deci\ g(x) > 0, \forall x \in Rsau\ g(x) < 0, \forall x \in R$. Dacă $g(x) > 0, \forall x \in R$(celălalt caz se tratează analog), atunci $f(nd) > f(d) > f(0) > f(-nd), \forall x \in R, și\ \forall n \in N^* - \{1\}$. Din șirul de inegalități de mai sus, obținem :
$l = \lim_{n\to\infty} f(nd) \geq f(d) > f(0) \geq \lim_{n\to\infty} f(-nd) = l$, ceea ce este fals, din ipoteză. Deci presupunerea că $g(x) > 0, \forall x \in R$, este falsă, deci există un x_1 număr real , astfel încât g(x_1)=0, deci f(x_1)-f(x_1+d)=0 și îl luăm pe x_2=x_1+d și rezultă enunțul.

3) Fie $(x_n)_{n\in N}$, un şir de numere reale, astfel încât există $\lim_{n\to\infty}(x_0 + x_1 + ... + x_n) \in \mathbf{R}$ **.**

Arătaţi că există $p \in \mathbf{N}^*$ cu proprietatea : $x_{p+1} \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right) x_p$.

(Dan Seclăman)

Demonstrație:

Presupunem că: $x_{n+1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n$, $\forall$ n $\in N^*$. Atunci $n x_{n+1} > (n-1) x_{n,}$ $\forall$ n $\in N^*$ (1)

Pentru n=1 $\Rightarrow$ $x_2 > 0$ (2). Din (1) $\Rightarrow$ $x_2 < 2x_3 < 3x_4 < \cdots < n x_{n+1} \Rightarrow$ $x_{n+1} > x_2 \frac{1}{n}$, $\forall$ n $\in N^*$, $n \geq 2 \Rightarrow x_2 + x_3 + \cdots + x_n > x_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$, $\forall n \geq 2$

Ținând cont de (2) $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \infty$ ceea ce contrazice ipoteza!

4) Fie I un interval inclus în R și $f: I \to Q$ este o funcție continuă pe I atunci f este constantă pe I.

Demonstrație :

Presupunem că funcția nu este constantă pe I, adică există $a, b \in I, a < b$ și $f(a) \neq f(b)$. Deoarece funcția f este continua pe I atunci f are proprietatea lui Darboux pe I, deci pentru orice y situat între f(a) și f(b) există $x \in [a, b]$ astfel încât y= f(x). Deoarece $f(a), f(b) \in Q$ și $f(a) \neq f(b)$ atunci există y$\in R - Q$, y situat între f(a) și f(b) , deci există $x \in [a, b]$ astfel încât y= f(x) $\in R - Q$, contradicție!

5) Fie I un interval inclus în R și $f: I \to R$ o funcție cu proprietatea lui Darboux care nu se anulează în nici un punct. Arătați că f păstrează semn constant pe I.

Demonstrație :

Presupunem că există $a, b \in I$ astfel încât $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$.

Atunci m=0 $\in [f(a), f(b)]$ deci există c$\in [a, b]$ cu f(c) = 0, contradicție ! f(x)$\neq 0, \forall x \in I$.

Bibliografie

D.M.Bătineţu, I.V.Maftei, I.M.Stancu-Minasian, Exerciţii şi probleme de analiză matematică pentru clasele a XI a şi a XII a, Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1981